Matematika Diskrit
(Discrete Mathematics)

Oleh : Asep Jalaludn,S.T.,M.M.

LOGIKA

Oleh : Asep Jalaludn,S.T.,M.M.

MUKADIMAH

"Dia akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat".

LOGIKA

"Cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi bukan dengan perasaan atau pengalaman"

Asep Jalaludin,St.,MM.

Mengapa Perlu Belajar Matematika Diskrit ?

Berbagai masalah yang dapat dipecahkan dengan menggunakan matematika diskrit:

- Ada berapa cara untuk menentukan password yang valid untuk suatu sistem komputer?
- Ada berapa alamat internet yang valid?
- Bagaimana memetakan genetik manusia? (*Genome project*)
- Berapa peluang untuk menang dalam suatu undian?
- Apakah ada *link* antara dua komputer dalam suatu jaringan komputer?
- Bagaimana mengatur jadwal take-off/landing/parkir pesawat-pesawat di bandara?
- Bagaimana menentukan lintasan terpendek antara dua kota dengan menggunakan sistem angkutan umum?
- Bagaimana mengurutkan suatu kumpulan data?

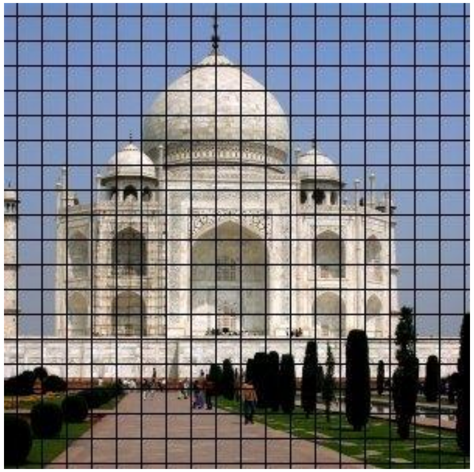
MENGAPA BELAJAR MATEMATIKA DISKRIT ?

- Landasan berbagai bidang matematika: logika, teori bilangan, aljabar linier dan abstrak, kombinatorika, teori graf, teori peluang (diskrit).
- Landasan ilmu komputer: struktur data, algoritma, teori database, bahasa formal, teori automata, teori compiler, sistem operasi, dan pengamanan komputer (computer security).
- Mempelajari latar belakang matematis yang diperlukan untuk memecahkan masalah dalam riset operasi (optimasi diskrit), kimia, ilmu-ilmu teknik, biologi, telekomunikasi, dsb.

Asep Jalaludin,St.,MM.

- Komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit.

- Kamera digital menangkap gambar (analog) lalu direpresentasikan dalam bentuk diskrit berupa kumpulan *pixel* atau *grid*. Setiap *pixel* adalah elemen diskrit dari sebuah gambar



Apa itu Objek Diskrit?

Suatu objek disebut diskrit jika terdiri dari sejumlah hingga elemen yang berbeda atau elemen yang tidak bersambungan.

Contoh : Himpunan bilangan bulat.

Bandingkan dengan himpunan bilangan riil, yang merupakan objek kontinyu.

Apa perbedaan antara kedua himpunan tersebut?

Asep Jalaludin,S.T.,M.M.

PRETEST

1. **Jika 20 mahasiswa akan disusun dalam 1 baris, berapa kemungkinan susunan yang dapat diperoleh?**
2. **Mahasiswa tingkat 2 terdiri dari 26 pria dan 16 wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang wakil?**
3. **Mahasiswa tingkat 2 terdiri dari 26 pria dan 16 wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang wakil pria dan satu orang wanita?**

Asep Jalaludin, St., MM.

Kombinatorial

Kombinatorial :

cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek.

Solusi : Jumlah cara pengaturan objek dalam himpunannya

Asep Jalaludin,St.,MM.

Permasalahan yang muncul dalam kombinatorial :

- ***Password*** **komputer terdiri dari 8 karakter. Berapa jumlah kemungkinan** ***password*** **yang dapat dibuat jika huruf besar dan kecil tidak dibedakan?**
- **Contoh pada pretest.**

Kombinatorial dan Enumerasi

Bagaimana cara menyelesaikan permasalahan tersebut?

Asep Jalaludin,S.T.,M.M.

a. Enumerasi :

mencacah atau menghitung satu persatu setiap kemungkinan jawaban. (*exhaustive search*).

Tidak memungkinkan digunakan untuk jumlah objek yang besar.

b. Kombinatorial

KOMBINATORIAL DAN KAIDAH MENGHITUNG (*COUNTING*)

Kombinatorial didasarkan pada hasil percobaan yang dilakukan.

Percobaan merupakan proses fisik yang hasilnya dapat diamati.

Hasil-hasil percobaan tersebut nantinya dapat dibuat suatu generalisasi yang menghasilkan formula atau aturan tertentu.

Contoh : Hasil percobaan melempar dadu adalah muka dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.

Kaidah Perkalian (*Rule of Product*)

Bila :

percobaan 1 mempunyai *x* hasil percobaan yang mungkin terjadi,

percobaan 2 mempunyai *y* hasil percobaan yang mungkin terjadi,

Maka :

bila percobaan 1 dan percobaan 2 dilakukan,

maka terdapat $x \times y$ hasil percobaan yang mungkin terjadi.

Asep Jalaludin, S.T., M.M.

KAIDAH PERKALIAN (*RULE OF PRODUCT*)

Contoh:

Terdapat 3 rute bus dari Solo ke Yogya, 4 rute bus dari Yogya ke Magelang. Ada berapa rute yang dapat ditempuh dari Solo ke Magelang?

Solusi :

Ada 3 kemungkinan rute Solo-Yogya dan 4 kemungkinan rute Yogya-Magelang, maka sesuai kaidah perkalian terdapat $3 \times 4 = 12$ kemungkinan rute yang ditempuh.

Asep Jalaludin,St.,MM.

KAIDAH PENJUMLAHAN (*RULE OF SUM*)

Bila :

percobaan 1 mempunyai x hasil percobaan yang mungkin terjadi,

percobaan 2 mempunyai y hasil percobaan yang mungkin terjadi,

Maka :

bila salah satu percobaan saja yang dilakukan (percobaan 1 atau percobaan 2 saja),

maka terdapat $x + y$ hasil percobaan yang mungkin terjadi.

KAIDAH PENJUMLAHAN (*RULE OF SUM*)

Contoh :

Jabatan Ketua Senat dapat diduduki oleh 13 mahasiswa MP, 27 mahasiswa TP. Berapa cara memilih penjabat Ketua Senat?

Solusi :

Jabatan yang ditawarkan hanya satu. Ada 13 cara memilih untuk MP, dan 27 cara untuk TP, namun hanya ada satu orang yang akan terpilih (MP atau TP), maka jumlah cara memilih penjabat Ketua Senat adalah 13 + 27 = 40 cara.

Perluasan Kaidah Perkalian dan Penjumlahan

Asep Jalaludin,St.,MM.

Jika :

terdapat *n* buah percobaan masing-masing mempunyai $p_1, p_2, \ldots, p_n$ hasil percobaan yang mungkin terjadi dengan syarat setiap p_i tidak tergantung pada pilihan sebelumnya,

Maka jumlah hasil percobaan yang mungkin terjadi adalah:

(a) $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ untuk kaidah perkalian; dan

(b) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ untuk kaidah penjumlahan.

Logika

- Penting untuk bernalar matematis
- Logika: sistem yg didasarkan atas proposisi.
- Proposisi: pernyataan yang bernilai benar atau salah, tapi tidak kedua-duanya.
- Kita katakan bahwa nilai kebenaran dari suatu proposisi adalah benar (T) atau salah (F).
- Berkorespondensi dengan 1 dan 0 dalam dunia digital.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Contoh Proposisi

"Gajah lebih besar daripada kucing."

Ini suatu pernyataan ? yes

Ini suatu proposisi ? yes

Apa nilai kebenaran dari proposisi ini ? true

Contoh Proposisi (2)

"1089 < 101"

Ini pernyataan ? yes

Ini proposisi ? yes

Apa nilai kebenaran dari proposisi ini ? false

Contoh proposisi (3)

"y > 15"

Ini pernyataan ? yes

Ini proposisi ? no

Nilai kebenarannya bergantung pada nilai y, tapi nilai ini tidak spesifik.

Kita katakan tipe pernyataan ini adalah fungsi proposisi atau kalimat terbuka.

Contoh proposisi (4)

"Bulan ini Februari dan $24 < 5$."

Ini pernyataan ? yes

Ini proposisi ? yes

Nilai kebenaran dari proposisi tersebut ? false

Asep Jalaludin,St.,MM.

Contoh proposisi (5)

"Jangan tidur di kelas."

Ini pernyataan ? no

Ini permintaan.

Ini proposisi ? no

Hanya pernyataan yang dapat menjadi proposisi.

CONTOH PROPOSISI (6)

"Jika gajah berwarna merah,
mereka dapat berlindung di bawah pohon cabe."

Ini pernyataan ? yes

Ini proposisi ? yes

Apa nilai kebenaran proposisi tersebut ? probably false

CONTOH PROPOSISI (7)

"x < y jika dan hanya jika y > x."

Ini pernyataan ? yes

Ini proposisi ? yes

… sebab nilai kebenarannya tidak bergantung pada nilai x dan y.

Apa nilai kebenaran dari proposisi tsb ? true

Menggabungkan proposisi

Seperti dalam contoh sebelumnya, satu atau lebih proposisi dapat digabung membentuk sebuah proposisi majemuk (*compound proposition*).

Selanjutnya, notasi proposisi diformalkan dengan menggunakan alfabet seperti p, q, r, s, dan dengan memperkenalkan beberapa operator logika.

Operator Logika

- Negasi (NOT)
- Konjungsi - Conjunction (AND)
- Disjungsi - Disjunction (OR)
- Eksklusif Or (XOR)
- Implikasi (JIKA – MAKA)
- Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Tabel kebenaran dapat digunakan untuk menunjukkan bagaimana operator-operator tsb menggabungkan proposisi-proposisi.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Negasi (NOT)

Operator Uner, Simbol: ¬

P	¬P
true	false
false	true

CONJUNCTION (AND)

Operator Biner, Simbol: $\wedge$

P	Q	$P \wedge Q$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

DISJUNCTION (OR)

Operator Biner, Simbol: ∨

P	Q	P∨Q
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

Asep Jalaludin,St.,MM.

Exclusive Or (XOR)

Operator Biner, Simbol: ⊕

P	Q	P⊕Q
true	true	false
true	false	true
false	true	true
false	false	false

Asep Jalaludin,St.,MM.

Implikasi (JIKA - MAKA)

Implikasi $p \rightarrow q$ adalah proposisi yang bernilai salah jika p benar dan q salah, dan bernilai benar jika lainnya.

P	Q	P→Q
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

Asep Jalaludin,St.,MM.

IMPLIKASI p → q

- Jika p, maka q
- Jika p, q
- p mengakibatkan q
- p hanya jika q
- p cukup untuk q
- Syarat perlu untuk p adalah q
- q jika p
- q ketika p
- q diakibatkan p
- q setiap kali p
- q perlu untuk p
- Syarat cukup untuk q adalah p

Contoh Implikasi

Implikasi

"Jika hari ini hari Jumat maka 2+3 > 7."

bernilai benar untuk semua hari kecuali hari Jumat, walaupun 2+3 > 7 bernilai salah.

Kapan pernyataan berikut bernilai benar?

"Jika hari tidak hujan maka saya akan pergi ke Lembang."

BIKONDISIONAL (JIKA DAN HANYA JIKA)

Operator Biner, Simbol: $\leftrightarrow$

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	true

Asep Jalaludin,St.,MM.

Pernyataan dan Operasi

Pernyataan-pernyataan dapat digabungkan dengan operasi untuk membentuk pernyataan baru.

P	Q	P∧Q	¬ (P∧Q)	(¬P)∨(¬Q)
true	true	true	false	false
true	false	false	true	true
false	true	false	true	true
false	false	false	true	true

Pernyataan yang Ekivalen

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
true	true	false	false	true
true	false	true	true	true
false	true	true	true	true
false	false	true	true	true

Pernyataan $\neg(P \wedge Q)$ dan $(\neg P) \vee (\neg Q)$ ekivalen secara logika, karena $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$ selalu benar.

Tautologi dan Kontradiksi

Tautologi adalah pernyataan yang selalu benar.

Contoh:

- $R \vee (\neg R)$
- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

Jika $S \rightarrow T$ suatu tautologi, kita tulis $S \Rightarrow T$.

Jika $S \leftrightarrow T$ suatu tautologi, kita tulis $S \Leftrightarrow T$.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Tautologi dan Kontradiksi (2)

Kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai salah.

Contoh:

- $R \wedge (\neg R)$
- $\neg(\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q))$

Negasi dari suatu tautologi adalah suatu kontradiksi, negasi dari kontradiksi adalah suatu tautologi.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Konversi, Kontrapositif, & Invers

- $q \rightarrow p$ disebut konversi dari $p \rightarrow q$
- $\neg q \rightarrow \neg p$ disebut kontrapositif dari $p \rightarrow q$
- $\neg p \rightarrow \neg q$ disebut invers dari $p \rightarrow q$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Ekspresi Logika

Contoh 4. Ubah ke dalam ekspresi logika:

"Anda mempunyai akses internet hanya jika anda mahasiswa Matematika ITB atau anda bukan mahasiswa TPB"

Solusi. Misal a : "Anda punya akses internet"

m: "Anda mhs Matematika ITB"

f : "Anda mhs TPB"

$$a \rightarrow (m \vee \neg f)$$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Ekspresi Logika (2)

Soal 1. Ubah kedalam ekspresi logika.

"Anda tidak boleh naik roller coaster jika tinggi anda kurang dari 100 cm, kecuali usia anda sudah melebihi 16 th."

"Saya akan ingat tentang kuliah besok hanya jika kamu mengirim sms."

"Pantai akan erosi ketika ada badai"

Asep Jalaludin,St.,MM.

Puzzle Logika

Puzzle (Smullyan, '98)

Suatu pulau mempunyai dua macam penghuni, yaitu penjujur (orang yg selalu berkata benar) dan pembohong (orang yg selalu berkata salah/bohong).

Anda bertemu dua orang A dan B di pulau itu. Jika A berkata bhw "B penjujur" dan B berkata bhw "kami berdua mempunyai tipe yg berlainan", maka apa yang dapat anda simpulkan tentang A dan B.

Asep Jalaludin,St.,MM.

PREDIKAT & KUANTIFIER

Pernyataan "x > 3" punya 2 bagian, yakni "x" sebagai subjek dan " adalah lebih besar 3" sebagai predikat P.

Kita dpt simbolkan pernyataan "x > 3" dengan P(x). Sehingga kita dapat mengevaluasi nilai kebenaran dari P(4) dan P(1).

Subyek dari suatu pernyataan dapat berjumlah lebih dari satu.

Misalkan Q(x,y): $x - 2y > x + y$

Kuantifikasi Universal

"P(x) benar untuk semua nilai x dalam domain pembicaraan"

$\forall x\ P(x)$.

Soal 2. Tentukan nilai kebenaran $\forall x\ (x^2 \geq x)$ jika:

x bilangan real

x bilangan bulat

Untuk menunjukkan $\forall x\ P(x)$ salah, cukup dengan mencari satu nilai x dalam domain shg P(x) salah.

Nilai x tersebut dikatakan contoh penyangkal (*counter example*) dari pernyataan $\forall x\ P(x)$.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Kuantifikasi Eksistensi

"Ada nilai x dalam domain pembicaraan sehingga P(x) bernilai benar"

$\exists x\ P(x)$.

Soal 3. Tentukan nilai kebenaran dari $\exists x\ P(x)$ bila P(x) menyatakan "$x^2 > 12$" dan domain pembicaraan meliputi semua bilangan bulat positif tidak lebih dari 4.

NEGASI

"Setiap mhs dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus I" [$\forall x\ P(x)$]

Apakah negasi dari pernyataan ini….?

"Ada seorang mhs dalam kelas ini yang belum mengambil Kalkulus I" [$\exists x \neg P(x)$]

Jadi, $\neg \forall x\ P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$.

NEGASI (2)

Soal 4. Carilah negasi dari pernyataan berikut:

"Ada politikus yang jujur"

"Semua orang Indonesia makan pecel lele"

Soal 5. Tentukan negasi dari:

$\forall x(x^2 > x)$

$\exists x\ (x^2 = 2)$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Kuantifier Bersusun (Nested Quantifier)

$\forall x \ \forall y \ (x+y = y+x)$

berarti $x+y = y+x$ berlaku untuk semua bilangan real x dan y.

$\forall x \ \exists y \ (x+y = 0)$

berarti untuk setiap x ada nilai y sehingga $x+y = 0$.

$\forall x \ \forall y \ \forall z \ (x+(y+z) = (x+y)+z)$

berarti untuk setiap x, y dan z berlaku hukum asosiatif $x+(y+z) = (x+y)+z$.

SOAL-SOAL

Soal 6. Artikan kalimat ini dalam bhs Indonesia:

$$\forall x\, (C(x) \vee \exists y\, (C(y) \wedge F(x,y))),$$

bila C(x) : "x mempunyai komputer",

F(x,y): "x dan y berteman",

dan domainnya adalah semua mhs di kampus.

Soal 7. Bagaimana dengan berikut ini:

$$\exists x\, \forall y\, \forall z((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z) \rightarrow \neg F(y,z))$$

Soal 8. Nyatakan negasi dari pernyataan

$$\forall x\, \exists y\, (xy=1).$$

Asep Jalaludin,St.,MM.

HIMPUNAN

Oleh : Asep Jalaludn,S.T.,M.M.

DEFINISI

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.
- HMTI adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

Cara Penyajian Himpunan

1. **Enumerasi**

   Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

   Contoh 1.

   - Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   - Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
   - $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
   - $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
   - $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
   - $K = \{ \{\} \}$
   - Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
   - Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- **Contoh 2.** Misalkan:

  $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$

  $K = \{\{\}\}$

  maka

  $3 \in A$

  $\{a, b, c\} \in R$

  $c \notin R$

  $\{\} \in K$

  $\{\} \notin R$

Contoh 3. Bila $P_1 = \{a, b\}$,

$P_2 = \{ \{a, b\} \}$,

$P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

Asep Jalaludin,St.,MM.

2. *Simbol-simbol Baku*

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }
Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

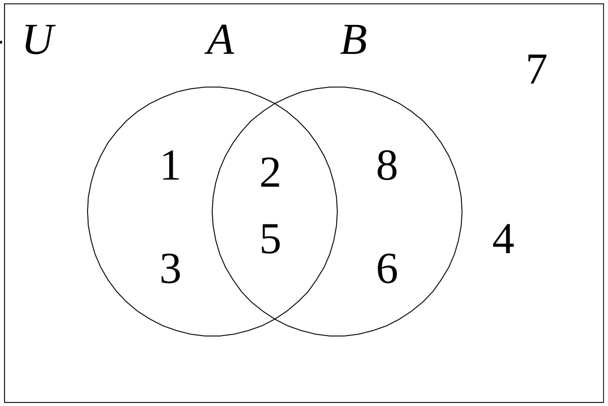
3. ***Diagram Venn***

Contoh 5.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



KARDINALITAS

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.

(i) B = { x | x merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 },

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$

HIMPUNAN KOSONG (*NULL SET*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\varnothing$ atau {}

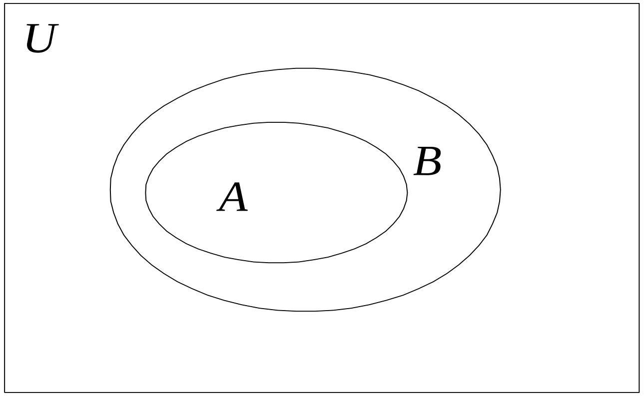
Contoh 7.
(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$
(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$
(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

Asep Jalaludin,St.,MM.

HIMPUNAN BAGIAN (*SUBSET*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.
- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.
- Notasi: $A \subseteq B$
- Diagram Venn:



Contoh 8.

(i) $\{ 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

Asep Jalaludin,St.,MM.

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

  Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

  (i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
  A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.
  Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  (ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

- Latihan

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B.

Jawaban:

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang-kurangnya satu elemen dari B.

Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau $C = \{1, 2, 3, 5\}$.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena C adalah *proper subset* dari B.

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 10.

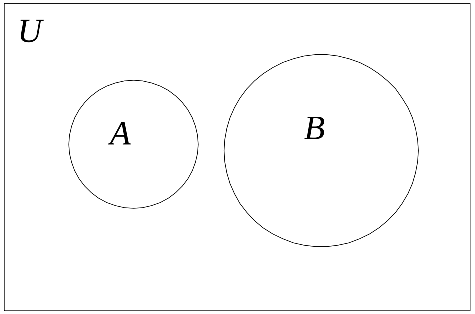
Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

HIMPUNAN SALING LEPAS

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : A // B

- Diagram Venn:



Contoh 11.
Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka A // B.

HIMPUNAN KUASA

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau 2^A

- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

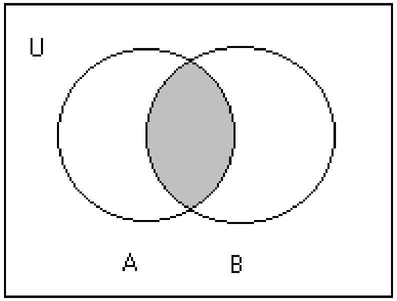
Contoh 12.
Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

Contoh 13.
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Contoh 14.

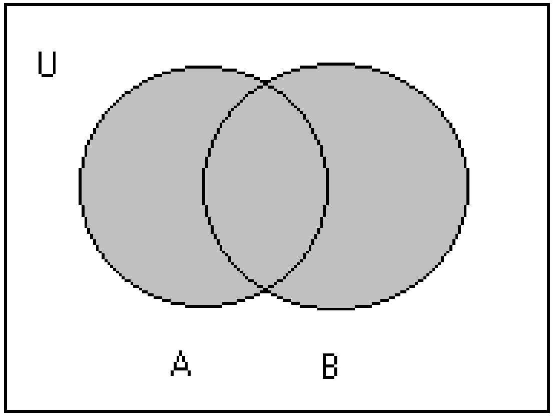
(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: $A \,//\, B$

Asep Jalaludin,St.,MM.

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



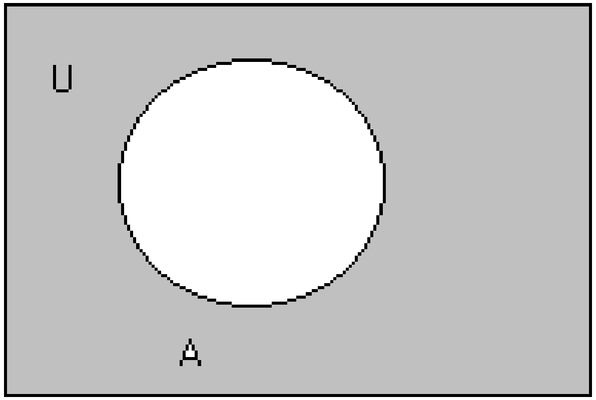
Contoh 15.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{\ x \mid x \in \mathrm{U},\ x \notin A\ \}$



Contoh 16.

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{\ x \mid x/2 \in P,\ x < 9\ \}$, maka $\overline{A} = \{\ 1, 3, 5, 7, 9\ \}$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

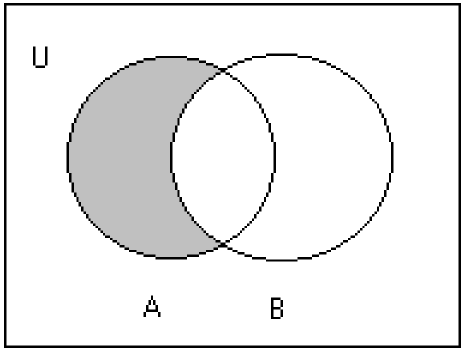
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



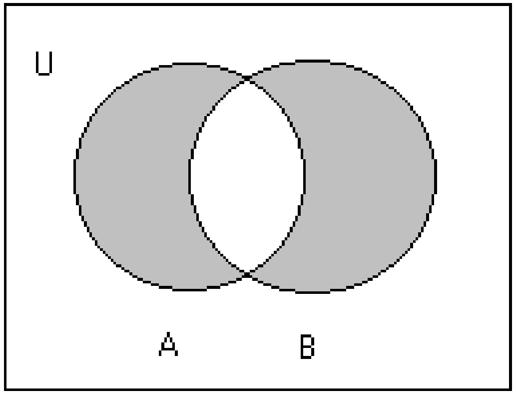
Contoh 18.

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 19.

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$
(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$
(iii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – ($P \cup Q$)

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

Asep Jalaludin,St.,MM.

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
   $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,
   $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$ = 4 · 3 = 12 kombinasi dan minuman, yaitu {(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)}.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

Penyelesaian:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)

(c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing) = \{\varnothing\} \times \{\varnothing\} = \{(\varnothing, \varnothing)\}$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{\varnothing, \{3\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\}\}$

Latihan

Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$

(c) $A - P(A) = A$

(d) $\{A\} \in P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$

Jawaban:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$ → salah, seharusnya $A \cap P(A) = \varnothing$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$ → benar

(c) $A - P(A) = A$ → benar

(d) $\{A\} \in P(A)$ → salah, seharusnya $\{A\} \subseteq P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$ →) salah, seharusnya $A \in P(A)$

Asep Jalaludin,St.,MM.

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka

$$C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
   $\left| A \times B \right| = \left| A \right| \, . \, \left| B \right|$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,
   $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

<u>Jawab</u>:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

Penyelesaian:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)

(c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing) = \{\varnothing\} \times \{\varnothing\} = \{(\varnothing, \varnothing))$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \varnothing, \{3\} \}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\} \}$

Latihan

Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$

(c) $A - P(A) = A$

(d) $\{A\} \in P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$

Jawaban:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$ → salah, seharusnya $A \cap P(A) = \varnothing$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$ → benar

(c) $A - P(A) = A$ → benar

(d) $\{A\} \in P(A)$ → salah, seharusnya $\{A\} \subseteq P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$ →) salah, seharusnya $A \in P(A)$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Contoh 22.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

HUKUM-HUKUM HIMPUNAN

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan
- Disebut juga hukum aljabar himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$

5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = U$ – $\overline{U} = \varnothing$	

PRINSIP DUALITAS

- Prinsip dualitas → dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: AS → kemudi mobil di kiri depan
Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,

- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip **dualitas**:
Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti

$\cup \rightarrow \cap$,

$\cap \rightarrow \cup$,

$\varnothing \rightarrow U$,

$U \rightarrow \varnothing$,

sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

Asep Jalaludin,St.,MM.

5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \varnothing$

Contoh 23. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Untuk dua himpunan A dan *B*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh 24. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$
$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$
$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Untuk tiga buah himpunan *A*, *B*, dan *C*, berlaku

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_r$, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

Latihan:

Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

Penyelesaian:
Diketahui:

$|U| = 500$
$|A| = \lfloor 600/4 \rfloor - \lfloor 100/4 \rfloor = 150 - 25 = 125$
$|B| = \lfloor 600/5 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor = 120 - 20 = 100$
$|A \cap B| = \lfloor 600/20 \rfloor - \lfloor 100/20 \rfloor = 30 - 5 = 25$

yang ditanyakan $|\overline{A \oplus B}| = ?$

Hitung terlebih dahulu

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 125 + 100 - 50 = 175$$

untuk mendapatkan

$$|\overline{A \oplus B}| = U - |A \oplus B| = 500 - 175 = 325$$

Asep Jalaludin,St.,MM.

PARTISI

Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong $A_1, A_2, \ldots$ dari A sedemikian sehingga:

(a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$, dan

(b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$

Contoh 25. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A.

HIMPUNAN GANDA (*MULTISET*)

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*).

  Contohnya, {1, 1, 1, 2, 2, 3}, {2, 2, 2}, {2, 3, 4}, {}.

- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: M = { 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 }, multiplisitas 0 adalah 4.

- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1.

- Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q =\{ a, a, b, c, c \}$,

   $P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

   $P \cap Q = \{ a, a, c \}$

3. P – Q adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:

- multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, jika selisihnya positif
- 0, jika selisihnya nol atau negatif.

Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P – Q = \{ a, e \}$

Asep Jalaludin,St.,MM.

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q.

Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
$P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

Pembuktian Proposisi Perihal Himpunan

- Proposisi himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.
- Proposisi dapat berupa:

1. Kesamaan (*identity*)

   Contoh: Buktikan "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$"

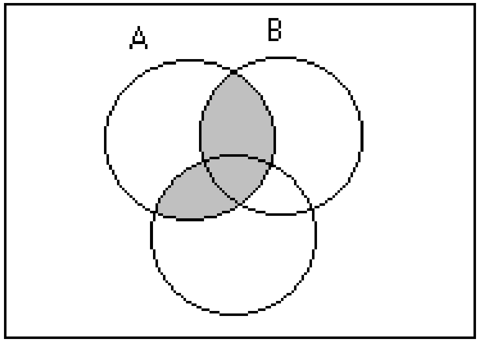
2. Implikasi

   Contoh: Buktikan bahwa "Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$".

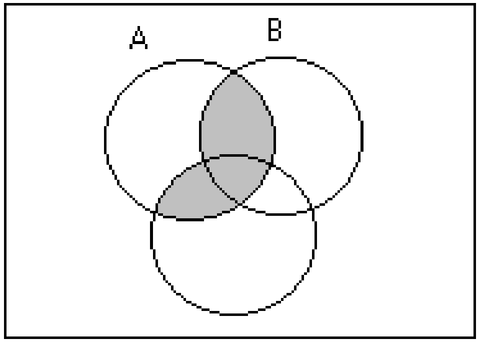
1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh 26. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.
Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.
- Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta.
- Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

Asep Jalaludin,St.,MM.

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh 27. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Asep Jalaludin,St.,MM.

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh 28. Misalkan *A* dan *B* himpunan. Buktikan bahwa

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{(Hukum distributif)} \\ &= A \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\ &= A && \text{(Hukum identitas)} \end{aligned}$$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Contoh 29. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) && \text{(Hukum distributif)} \\
&= (A \cup B) \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\
&= A \cup B && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Contoh 30. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan

(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cap B)$ (H. distributif)

$= U \cap (A \cap B)$ (H. komplemen)

$= A \cup B$ (H. identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ (H. distributif)

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (H. komplemen)

$= A \cap B$ (H. identitas)

Asep Jalaludin,St.,MM.

- **Latihan**. Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Gunakan hukum-hukum aljabar himpunan dan prinsip dualitas untuk menentukan hasil dari operasi himpunan

  (a)

  (b)

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

Jawaban:

a. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

$= ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$ [Hukum Asosiatif]

$= (B \cap (A \cup \overline{A})) \cup (\overline{B} \cap (A \cup \overline{A}))$ [Hukum Distributif]

$= (B \cap U) \cup (\overline{B} \cap U)$ [Hukum Komplemen]

$= U \cap (B \cup \overline{B})$ [Hukum Distributif]

$= U \cap U$ [Hukum Komplemen]

$= U$ [Hukum Idempoten]

b. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

$= \varnothing$ [Hukum Dualitas dari jawaban a]

- **Latihan**. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan bahwa

  $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$.

Asep Jalaludin,St.,MM.

- Jawaban:

$$
\begin{aligned}
(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) && \text{(Definisi Selisih)} \\
&= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{(Hukum Distributif)} \\
&= A \cap \overline{B \cup C} && \text{(Hukum DeMorgan)} \\
&= A - (B \cup C) && \text{(Definisi Selisih)}
\end{aligned}
$$

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh 31. Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup \mathrm{C})$. Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

(ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall \mathrm{x} \in A$ juga berlaku $x \in \mathrm{C}$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Latihan

Misalkan A adalah himpunan bagian dari himpunan semesta (U). Tuliskan hasil dari operasi beda-setangkup berikut?

(a) $A \oplus U$ (b) $A \oplus \overline{A}$ (c) $\overline{A} \oplus U$

Penyelesaian:

(a) $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= (\varnothing) \cup (A)$ (Definisi opearsi selisih)

$= \overline{A}$ (Hukum Identitas)

(b) $A \oplus \overline{A} = (A - \overline{A}) \cup (\overline{A} - A)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A})$ (Definisi operasi selisih)

$= A \cup \overline{A}$ (Hukum Idempoten)

$= U$ (Hukum Komplemen)

(c) $\overline{A} \oplus U = (\overline{A} \cup U) - (\overline{A} \cap U)$ (Definisi operasi beda setangkup)

$= U - \overline{A}$ (Hukum Null dan Hukum Identitas)

$= A$ (Definisi operasi selisih)

TIPE *SET* DALAM BAHASA PASCAL

Bahasa Pascal menyediakan tipe data khusus untuk himpunan, yang bernama *set*. Tipe *set* menyatakan himpunan kuasa dari tipe ordinal (*integer*, *character*).

Contoh:

```
type
   HurufBesar = 'A'..'Z';{ enumerasi }
   Huruf = set of HurufBesar;
var
   HurufKu : Huruf;
```

Asep Jalaludin,St.,MM.

Nilai untuk peubah `HurufKu` dapat diisi dengan pernyataan berikut:

```
HurufKu:=['A', 'C', 'D'];
HurufKu:=['M'];
HurufKu:=[];      { himpunan kosong }
```

- Operasi yang dapat dilakukan pada tipe himpunan adalah operasi gabungan, irisan, dan selisih seperti pada contoh berikut:

```
{gabungan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] + ['C', 'D', 'E'];

{irisan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] * ['C', 'D', 'E'];

{selisih}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] - ['C', 'D', 'E'];
```

- Uji keanggotaan sebuah elemen di dalam himpunan dilakukan dengan menggunakan opeator *in* seperti contoh berikut:

```
if 'A' in HurufKu then ...
```

- Di dalam kakas pemrograman *Delphi*, *set* sering digunakan untuk mengindikasikan *flag*. Misalnya himpunan *icon* untuk *window*:

```
type
    TBorderIcon=(biSystemMenu, biMinimize,
                 biMaximaze);

    Huruf = set of TBoderIcon;
```

Asep Jalaludin,St.,MM.

(PERMUTASI & KOMBINASI)

Oleh : Asep Jalaludn,S.T.,M.M.

KAIDAH PENCACAHAN

Aturan Perkalian

Dari A ke B ada 4 jalan dan dari B ke C ada 3 jalan.Bagaimana cara mendaftar semua pilihan jalan yang dapat ditempuh dari A menuju C melalui B?

Jawab :

Menggunakan aturan perkalian, maka banyak cara adalah 4 x 3 = 12 cara.

Berdasarkan soal diatas, secara umum aturan perkalian dapat dituliskan sebagai berikut :

Jika kejadian pertama dapat terjadi sebanyak n1 cara berbeda, kejadian kedua sebanyak n2 cara berbeda, kejadian ketiga sebanyak n3 cara berbeda, sampai seterusnya sampai kejadian ke k mempunyai nk cara berbeda, maka gabungan dari semua kejadian itu dapat terjadi dalam n1 x n2 x n3 x...x nk cara berbeda.

Asep Jalaludin,St.,MM.

Definisi dan Notasi Faktorial

4 x 3 x 2 x 1 dapat dinotasikan sebagai 4! (dibaca 4 faktorial).Secara umum hasil kali bilangan asli dari satu sampai dengan n ditulis dengan notasi n! (n faktorial).

Definisi :

n! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x...x (n-2) x (n-1) x n atau

n! = n x (n-1) x (n-2) x (n-3) x (n-4) x (n-5) x...x 3 x 2 x 1

Cntoh Soal :

5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

Hitunglah n, jika

Sederhanakan dulu bentuk faktorialnya :

n = -2 atau n = 3, karena n bilangan positif, maka n = 3

Asep Jalaludin,St.,MM.

Permutasi dan kombinasi merupakan suatu alat analisis yang mempunyai peranan yang sangat penting, khususnya dalam menentukan banyaknya alternatif yang dapat dimungkinkan dalam pengambilan keputusan. Pertanyaan tentang berapa macam cara suatu peristiwa, dapat terjadi seringkali dihadapi dalam penghitungan bermacam kemungkinan untuk menentukan alternatif pemilihan.

Dalam membahas Permutasi dan Kombinasi, yang perlu dipahami adalah pengertian Faktorial (disimbolkan dengan tanda seru atau !). Nilai suatu bilangan yang difaktorialkan diformulasikan : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$. (khusus untuk $0! = 1$). Sebagai contoh : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Permutasi dan kombinasi merupakan suatu alat analisis yang mempunyai peranan yang sangat penting, khususnya dalam menentukan banyaknya alternatif yang dapat dimungkinkan dalam pengambilan keputusan. Pertanyaan tentang berapa macam cara suatu peristiwa, dapat terjadi seringkali dihadapi dalam penghitungan bermacam kemungkinan untuk menentukan alternatif pemilihan.

Dalam membahas Permutasi dan Kombinasi, yang perlu dipahami adalah pengertian Faktorial (disimbolkan dengan tanda seru atau !). Nilai suatu bilangan yang difaktorialkan diformulasikan : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$. (khusus untuk $0! = 1$). Sebagai contoh : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Permutasi

Permutasi merupakan penyusunan obyek-obyek yang ada ke dalam suatu urutan tertentu. Hal yang perlu diperhatikan dalam permutasi adalah bahwa obyek-obyek yang ada harus dapat "dibedakan" antara yang satu dengan yang lain. Permutasi dapat dirumuskan : nPx = (n!)/(n-x)! ; dimana n = banyaknya seluruh obyek, dan x = banyaknya obyek yang dipermutasikan.

Nilai n dan x masing-masing harus lebih besar dari nol. Jika nilai x < n disebut dengan Permutasi Sebagian Obyek. Jika nilai x = n, maka disebut Permutasi Seluruh Obyek, sehingga rumus tersebut dapat disederhanakan menjadi : nPx = n! .

Permutasi merupakan permasalahan mencari banyak cara menyusun.Suatu himpunan H beranggotakan n unsur.Permutasi r unsur dari himpunan H adalah banyaknya cara menyusun r unsur anggota H.Seperti, menentukan banyaknya susunan 4 orang yang mungkin dari 10 orang calon dan dilambangkan P_4^{10}

Contoh Soal :

Pada kelas XI IPA 5 / SMK, dari 10 orang disusun 4 orang untuk dijadikan ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara.Banyaknya cara memilih :

$$P_4^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040\ cara$$

P_3^7

Angka ratusan ada 6 cara (tidak mungkin 0)
Angka puluhan ada 6 cara (termasuk dengan 0)
Angka satuan ada 5 cara (karena 2 angka sudah dipakai pada angka ratusan dan puluhan)
Jadi banyaknya cara menyusun adalah 6 x 6 x 5 = 180 cara
Kesimpulan :
Rumus permutasi r unsur : $P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 akan disusun suatu bilangan yang terdiri dari 3 angka berbeda.Permasalahnnya adalah menentukan banyak susunan 3 angka dari 7 angka yang tersedia atau permutasi 3 dari 7 angka, yaitu

Dengan n dan r bilangan bulat positif , serta $0 \le r \le n$

A .Permutasi dengan unsur sama

Dari huruf-huruf yang menyusun kata MAKASSAR disusun kata-kata yang lain.Dari kata MAKASSAR diperoleh huruf-huruf yang sama :

Huruf A sebanyak : k1 = 3

Huruf S sebanyak : k2 = 2

Banyak huruf seluruhnya : n = 8

Banyak susunan huruf yang mungkin adalah :

$$P = \frac{n!}{k1! \times k2!} = \frac{8!}{3! \times 2!} = 3360$$

B. Permutasi siklis

Banyaknya susunan berbeda dari unsur-unsur yang membentuk lingkaran disebut permutasi siklis.Rumusnya P = (n-1)!

Asep Jalaludin,St.,MM.

Kombinasi

Kombinasi dari kombinasi merupakan perkalian perkalian antara banyaknya kombinasi suatu kumpulan obyek dengan banyaknya kombinasi dari obyek lainnya. Formulasi untuk mencari kombinasi dari kombinasi adalah sebagai berikut : nCx . mCy = (n!)/(x!(n-x)!) . (m!)/(y!(m-y)!).

Contoh :

Suatu kelompok yang terdiri dari 3 orang pria dan 2 orang wanita akan memilih 3 orang pengurus. Berapa cara yang dapat dibentuk dari pemilihan jika pengurus terdiri dari 2 orang pria dan 1 orang wanita. Jawab : 3C2 . 2C1 = (3!)/(2!(3-2)!) . (2!)/(1!(2-1)!) = 6 cara, yaitu : L1 L2 W1 ; L1 L3 W1 ; L2 L3 W1 ; L1 L2 W2 ; L1 L3 W2 ; L2 L3 W2

Suatu himpunan H beranggotakan n unsur.Kombinasi n unsur dari H adalah banyaknya cara memilih n anggota H.Rumus kombinasi :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Asep Jalaludin,St.,MM.

Contoh soal :

Seorang petani membeli 2 sapi, 3 kambing, dan 5 ayam dari seorang pedagang yang mempunyai 4 sapi, 5 kambing, dan 8 ayam. Dengan berapa cara petani tersebut dapat memilih sapi , ayam, dan kambing?

Jawab :

Banyak cara memilih 2 sapi dari 4 sapi :

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6$$

Banyak cara memilih 3 kambing dari 5 kambing :

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

Banyak cara memilih 5 ayam dari 8 ayam :

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = 56$$

Banyak cara petani memilih sapi, kambing, dan ayam = 6 x 10 x 56 = 3360 cara

KESIMPULAN (PERBEDAAN ANTARA KOMBINASI DAN PERMUTASI) :

Permutasi menentukan banyaknya cara menyusun, berarti urutannya diperhatikan. Misalnya menyusun angka menjadi bilangan merupakan permasalahan permutasi, karena 21 berbeda dengan 12. (diperhitungkan)

Kombinasi menentukan banyaknya cara memilih, berarti urutannya tidak diperhatikan. Misalnya dalam mencampuri warna, campuran merah-kuning sama dengan campuran kuning-merah.